Section 3.4

Barisan Bagian dan Teorema Bolzano Weierstrass

Di bagian ini kita akan diberikan konsep dari barisan bagian dari barisan bilangan real. Secara informal, barisan bagian dari barisan adalah satu pemilihan kondisi dari urutan tertentu sedemikian hingga kondisi terpilih membentuk satu urutan baru. Biasanya pilihan dibuat untuk satu maksud defenisi. Selain Itu, barisan bagian sering digunakan di dalam menentukan kekonvergenan atau divergen dari suatu barisan. Kita juga akan membuktikan pentingnya keberadaan teorema yang dikenal sebagai teorema Bolzano Weierstrass, yang dapat digunakan untuk menentukan hasil bilangan secara signifikan.

Definisi 3.4.1

Diberikan $X = (x_n)$ sebagai barisan bilangan real dan diberikan $n_1 < n_2 < ...... < n_k <.........$ sebagai barisan bilangan asli naik tegas. Kemudian barisan $X' = (x_{n_k})$ dengan $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$ disebut barisan bagian atau sub barisan (subsequences) dari X.

Contoh , jika X = $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)$, kemudian dipilih hasil index barisan bagian $X' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, ... \frac{1}{2k}, ...\right)$, dimana $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, ...$n_k = 2k$,......

barisan bagian yang lain pada X = (1/n) adalah sebagai berikut : $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{2k-1}, ...\right), \left(\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{6!}, ..., \frac{1}{(2k)!}, ...\right)$.

Barisan berikut bukan merupakan barisan bagian dari X = (1/n) :

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5} ......\right), \left(\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0.......\right)$.

Ekor Suatu barisan (lihat 3 1.8.) merupakan tipe khusus dari barisan bagian. Bahkan, m-ekor sesuai dengan indeks barisan.

$n_l = m + 1$, $n_2 = m + 2$..... , $n_k = m + k$, · ··.

Tapi, jelas, tidak setiap barisan bagian dari barisan yang diberikan membutuhkan ekor barisan. Barisan bagian merupakan barisan konvergen juga konvergen pada limit yang sama, seperti yang yang akan ditunjukkan sekarang.

3.4.2 Teorema*. Jika barisan $X = (x_n)$ dari bilangan real konvergen ke bilangan real x, maka setiap barisan bagian $X' = (x_n)$ dari X juga konvergen ke x.*

Bukti : Diberikan $\varepsilon > 0$ dan ambil $K(\varepsilon)$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\varepsilon)$, sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$. Karena $n_1 < n_2 < \ldots\ldots n_k < \ldots.$ Adalah pasangan barisan bilangan asli yang mudah dibuktikan (dengan induksi) dengan $n_k \geq k$. oleh karena itu, jika $k \geq K(\varepsilon)$ kita juga memiliki $n_k \geq k \geq K(\varepsilon)$ sehingga $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Oleh karena itu barisan bagian (x_{n_k}) juga konvergen di x.

3.4.3 Contoh

(a). lim $(b^n) = 0$ Jika $0 < b < 1$

Kita telah melihat, dalam Contoh 3.1 .11 (b) bahwa, jika $0 < b < 1$ dan jika $x_n = b^n$, kemudian pada ketaksamaan bernoulli's bahwa lim $(x_n) = 0$. Alternativ lain kita melihat bahwa dari $0 < b < 1$, kemudian $x_{n+1} = b^{n+1} < b^n = x_n$, maka barisan ($x_n$) adalah menurun. Juga pada $0 \leq x^n \leq 1$, selain itu, mengikuti dari teorema kekonvergenan monoton *3.3.2* bahwa barisan tersebut konvergen. Misal $x = Lim\ x_n$. Karena (x_{2n}) adalah barisan bagian dari (x_n) diikuti dari teorema *3.4.2* pada $x = Lim(x_{2n})$. Selain itu, di ikuti dari pasangan $x_{2n} = b^{2n} = (b^n)^2 = x^2 n$ dan teorema 3.2.2 bahwa :

$$x = Lim(x_{2n}) = (lim(x_n))^2 = x^2.$$

Oleh karena itu kita harus memilih $x = 0$ atau $x = 1$ karena barisan (x_n) adalah menurun dan terbatas Pada $b < 1$ kita dapat menyimpulkan $x = 0$.

(b). $Lim(c^{1/n}) = 1$ untuk $c > 1$

Pada limit ini kita dapatkan dari contoh 3.1.11 (c) untuk $c > 0$, menggunakan argumen. Kita menggunakan pendekatan alternatif untuk kasus $c > 1$. Catatan bahwa jika $z_n = c^{1/n}$, kemudian $Z_n > 1$ *dan* $z_{n+1} < z_n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. (mengapa?) dengan teorema kekonvergenan monoton , $lim\ z = lim\ (z_n)$ ada.

Dengan Teorema 3.4.2, berikut bahwa $z = Lim(z_{2n})$. Sebagai tambahan dari hubungan berikut :

$Z_{2n} = c^{1/2n} = (c^{1/n})^{\frac{1}{2}} = z_n^{1/2}$.

Sehingga kita memiliki $z^2 = z$ dimana diikuti salah satu $z = 0$ atau $z = 1$. Karena $z_n > 1$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, kita simpulkan bahwa $z = 1$.

Kami meninggalkan sebagai latihan bagi pembaca untuk mempertimbangkan kasus $0 < c < 1$.

Teorema 3.4.4. Misalkan X = (x_n) sebagai barisan bilangan real, maka pernyataan berikut ini ekuivalen:

(i). Barisan $X = (x_n)$ *tidak konvergen ke* $x \in \mathbf{R}$

(ii). Ada $\varepsilon_0 > 0$ *sedemikian hingga untuk sembarang* $k \in N$, *terdapat* $n_k \in N$ *sedemikian hingga* $n_k \geq k$ *dan* $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$

(iii). Ada $\varepsilon_0 > 0$ *dan suatu barisan bagian* $X' = (x_{nk})$ *dari X sedemikian hingga* $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$ *untuk setiap* $k \in N$

Bukti .

(i) => (ii) Jika (x_n) tidak konvergen ke x, maka untuk suatu $\varepsilon_0 > 0$ tidak mungkin ditemukan bilangan asli k ($k \in \mathbf{N}$**)** sedemikian hingga untuk setiap $n \geq k$ pada kondisi x_n berlaku $|x_n - x| < \varepsilon_0$. Akibatnya tidak benar bahwa setiap $k \in N$, $n \geq k$ *memenuhi* $|x_n - x| < \varepsilon_0$. Dengan kata lain untuk setiap $k \in \mathbf{N}$ terdapat bilangan asli $n_k \geq k$ sedemikian hingga $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$

(ii)=> (iii) Diberikan $\varepsilon 0 > 0$ sehingga memenuhi (ii) dan diberikan $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n \geq 1$ dan $|x_{n_1} - x| \geq \varepsilon_0$ selanjutnya diberikan $n2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_2 > n_1$ dan $|x_{n_2} - x| \geq \varepsilon_0$. selanjutnya diberikan $n_3 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_3 > n_2$ dan $|x_{n_3} - x| \geq \varepsilon_0$. Demikian seterusnya sehingga diperoleh suatu barisan bagian $X' = (x_{nk})$ *dari X sehingga berlaku* $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$ *untuk setiap* $k \in \mathbb{N}$.

(iii) => (i) Misalkan (X)= (x_n) mempunyai barisan bagian $X'=(x_{nk})$ yang memenuhi sifat (iii). Maka X tidak konvergen ke x, sebab jika konvergen ke x, maka $X' = (x_{nk})$ juga konvergen ke x. Karena dari teorema 3.4.2, barisan bagian X' juga konvergen ke x. Hal ini tidak mungkin, sebab $X' = (x_{nk})$ tidak berada dalam Lingkungan $V_{\varepsilon_0}(x)$.

Karena semua barisan bagian yang konvergen harus konvergen pada limit yang sama, kita mendapatkan hasil berikut pada bagian (i). Bagian (ii) diikuti dari fakta bahwa barisan konvergen yang terbatas.

3.4.5. Kriteria Divergen : *Jika barisan bilangan real* X= (X_n) *memenuhi salah satu dari sifat berikut, maka barisan* X *divergen*

(i). X *mempunyai dua barisan bagian konvergen* X'= (X_{nk}) dan X"= (X_{rk}) *dengan limit keduanya tidak sama*

(ii). X *tidak terbatas*

3.4.6 contoh :

(a). Tunjukkan bahwa barisan X = $((-1)^n)$ adalah difergen.

Barisan bagian X' = $((-1)^{2n})$ = (1,1,....) konvergen ke 1, dan barisan bagian X" = $((-1)^{2n-1})$ = (-1,-1,-1,...) konvergen ke -1. Untuk itu, kita simpulkan dari teorema 3.4.5 (i) bahwa X adalah divergen.

(b). Tunjukkan bahwa barisan $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4} ....)$ divergen.

Namakan barisan tersebut dengan Y = (y_n) dimana y_n = n jika n ganjil, dan $y_n = \frac{1}{n}$ jik, a n genap. Dengan mudah kita dapat melihat bahwa Y tidak terbatas. Sehingga berdasarkan teorema 3.4.5 (ii), maka barisan tersebut divergen.

(c). Tunjukkan bahwa barisan S = (sin n) divergen

Barisan ini tidak mudah ditangani. Harus membutuhkan diskusi tentunya, membuat properti dasar dari fungsi sinus. Kita dapat menyebutnya bahwa

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ dan bahwa sin x > ½ untuk x pada interval $I_1 = (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$.

Karena panjang dari I_1 = $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} > 2$ dimana 2 adalah bilangan asli I_1; kita misalkan n_1 sebagai bilangan pertama. Dengan cara yang sama, untuk setiap $k \in N$, sin x > ½ untuk x pada interval :

$$I_k = (\pi/6 + 2\pi(k-1), 5\pi/6 + 2\pi(k-1))$$

Karena panjang I_k lebih dari 2 dimana 2 adalah bilangam asli I_k: kita mengambil n_k yang pertama. Barisan bagian S' = (sin n_k) dari S diperoleh nilai pada interval [½,1].

Dengan cara yang sama, jika $k \in N$ *dan* J_k pada interval

$$J_k = (7\pi/6 + 2\pi(k - 1), 11\pi/6 + 2\pi(k - 1)),$$

Kemudian kita melihat bahwa *sin x* < -½ untuk setiap $x \in J_k$ dan panjang J_k lebih dari 2. Misalkan m_k adalah bilangan asli di J_k. Kemudian barisan S'' = (sin m_k) dari *S* memiliki semua nilai yang terletak pada interval [-1, -½].

Diberikan setiap bilangan asli c dilihat pada barisan bagian *S'* dan *S''* terletak diluar ½ - lingkungan dari c. Oleh karena itu, c bukanlah limit dari *S*. Karena $c \in \mathbf{R}$ berubah-ubah, maka kita dapat menyimpulkan bahwa *S* adalah divergen.

Eksistensi barisan bagian monoton

Tidak semua barisan adalah barisan monoton, kita akan menunjukkan bahwa setiap barisan adalah barisan bagian yang monoton

3.4.7. Teorema Barisan Bagian Monoton : *Jika X = (x_n) adalah barisan bilangan real, maka terdapat barisan bagian X yang monoton.*

Bukti : untuk membuktikan ini, kita akan diberikan pengertian puncak "peak". X_m disebut puncak jika $x_m \geq x_n$ untuk setiap n sedemikian hingga $n \geq m$. (dimana titik x_m tidak pernah didahului oleh sembarang elemen barisan setelahnya). Catatan bahwa pada barisan yang menurun setiap elemen adalah puncak, tetapi pada barisan yang naik tidak ada elemen yang menjadi puncak.

Kita akan membagi menjadi 2 kasus yaitu X mempunyai tak hingga banyak puncak, dan X mempunyai berhingga banyak puncak.

Kasus I : X mempunyai tak hingga banyak puncak. Dalam kasus ini kita menuliskan semua puncak yang naik berurutan, yaitu x_{m1}, x_{m2}, x_{m3},..... x_{mk},..... maka masing-masing memiliki elemen puncak sehingga kita mendapatkan $x_{m1} \geq x_{m2} \geq ..... \geq x_{mk} \geq .....$ Oleh karena itu,barisan bagian dengan puncak (x_{mk}) merupakan barisan bagian yang menurun dari X.

Kasus II : X mempunyai berhingga banyak puncak (bisa nol). Tuliskan semua puncak naik secara berurutan : x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, ...x_{mr}. musalkan $s_1 = m_r + 1$ adalah indeks pertama dari puncak yang terakhir. Karena x_{s1} bukan puncak maka terdapat $s_2 > s_1$ sedemikian hingga $x_{s1} < x_{s2}$. Karena x_{s2} bukan puncak, maka terdapat $s_3 < s_2$ sedemikian hingga $x_{s2} < x_{s3}$. Jika proses ini diteruskan kita memperoleh barisan bagian (x_{sk}) yang naik dari X.

Tidak susah melihat bahwa suatu barisan tertentu mungkin memiliki satu barisan bagian yang naik dan barisan bagian yang lain yang menurun.

Teorema Bolzano-Weierstrass

Kita akan menggunakan barisan bagian monoton untuk membuktikan teorema Bolzano-Weierstrass, yang mengatakan bahwa setiap barisan yang terbatas pasti memuat barisan bagian yang konvergen. Karena pentingnya teorema ini kita juga akan memberikan 2 bukti dasar .

3.4.8. Teorema Bolzano-Weierstrass : *setiap barisan bilangan real yang terbatas pasti memuat barisan bagian yang konvergen.*

Bukti I : Diikuti dari teorema barisan bagian monoton bahwa jika X = (x_n) adalah barisan yang terbatas kemudian barisan bagian X' = (x_{nk}) adalah monoton. Karena barisan bagian ini juga terbatas, berdasarkan teorema kekonvergenan monoton 3.3.2, maka barisan bagian tersebut konvergen.

Bukti II :